Задачи и решения очного тура
Олимпиады ДмиТИ-2017-2018

1. Рыцари и лжецы. Логическая схема - 1.

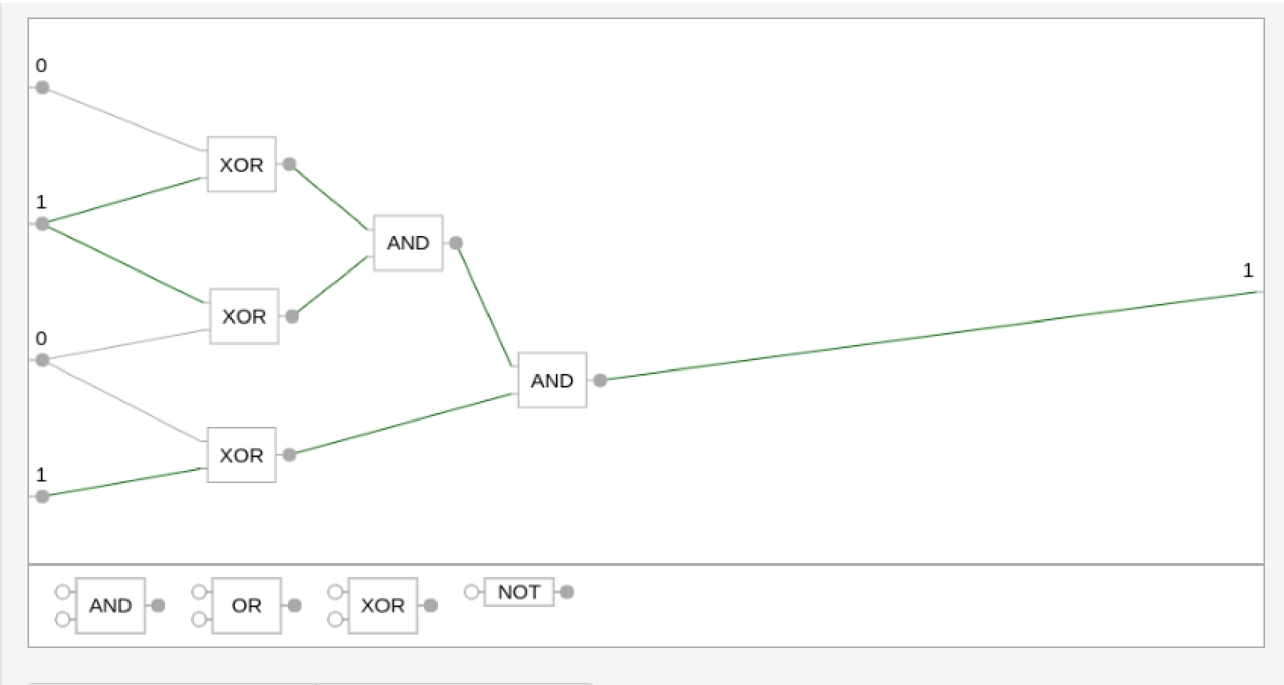
За круглым столом сидят четыре человека. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Постройте логическую схему, которая принимает значение истина тогда и только тогда, когда каждый из сидящих за столом может произнести фразу «Оба моих соседа лжецы».

На логической схеме входы соответствуют людям: нули обозначают лжецов, а единицы рыцарей. Соседние входы соответствуют соседним людям, кроме того, поскольку стол круглый, верхний вход будем считать соседним с нижним.

Разрешается использовать логические элементы AND (и), OR (или), NOT (не) и XOR (исключающее или).

Решение:

Заметим, что для выполнения условия задачи для четырёх человек необходимо и достаточно, чтобы рыцари и лжецы чередовались. Действительно, соседними рыцари быть не могут, значит их не больше двух. С другой стороны, расстановки без рыцарей или с одним рыцарем также очевидно невозможны.
Построим схему исходя из этого наблюдения. Каждые два соседа должны быть различны, соединим три пары соседей элементами XOR. Четвёртый такой элемент нам не требуется, так как его истинность является следствием из истинности трёх построенных.
Закончим схему двумя элементами AND, построив конъюнкцию этих элементов XOR.



2. Рыцари и лжецы. Логическая схема - 2.

За круглым столом сидит n>2 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Опишите способ построения логической схемы с n входами, которая принимает значение истина тогда и только тогда, когда каждый из сидящих за столом может произнести фразу «Оба моих соседа лжецы».

На логической схеме входы соответствуют людям: нули обозначают лжецов, а единицы рыцарей. Соседние входы соответствуют соседним людям, кроме того, поскольку стол круглый, верхний вход будем считать соседним с нижним.
Разрешается использовать логические элементы AND (и), OR (или), NOT (не) и XOR (исключающее или).

Решение:

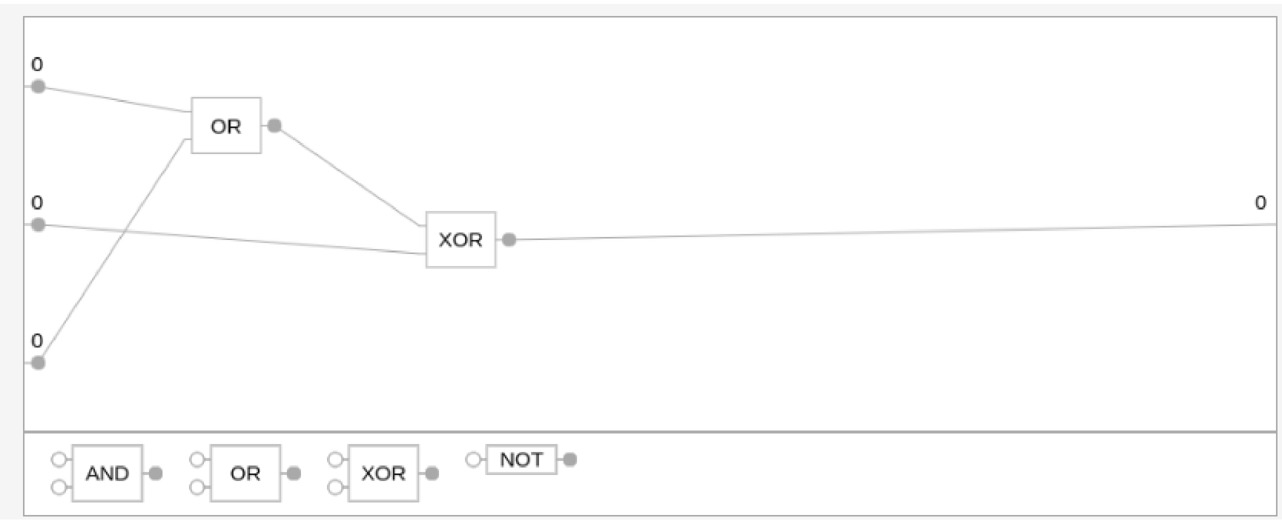
Ниже вы можете увидеть схему, которая даёт истинный результат, если средний из трёх человек может сказать, что все его соседи лжецы.

Действительно, он может сказать это в одном из двух случаев:

1) Он сам лжец, а хотя бы один из его соседей рыцарь

2) Он сам рыцарь, а оба его соседа лжецы .

То есть, из двух утверждений "Он сам рыцарь" и "Хотя бы один из его соседей рыцарь", одно из утверждений истинно, а второе ложно, что соответствует операции XOR (исключающее или).



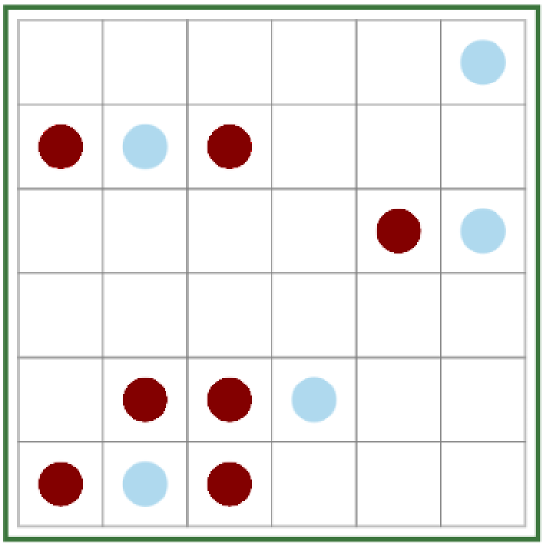
Построив такую схему для каждого человека, мы объединим их при помощи элементов AND и получим искомую схему.

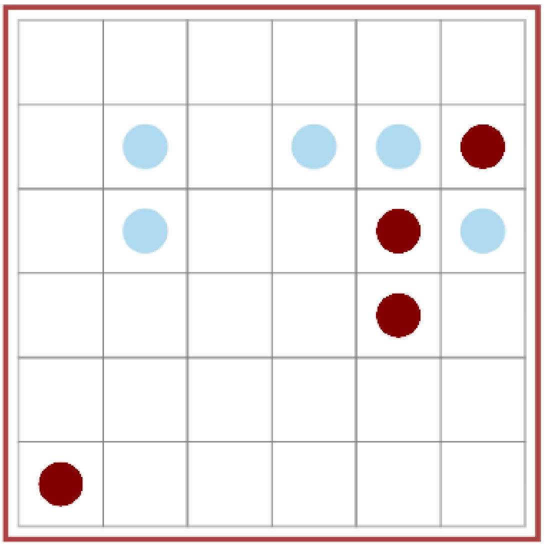
3. Рыцари и лжецы. Составление логического выражения.

На некоторых клетках квадратной клетчатой доски стоят рыцари, которые говорят только правду, а на некоторых — лжецы, которые всегда лгут. Некоторые клетки могут быть свободны; на каждой клетке стоит не более одного человека. Рыцари обозначены светлыми (голубыми) кружками, лжецы — тёмными (красными).

Составьте логическое выражение, которое истинно тогда и только тогда, когда каждый из стоящих на доске человек может произнести фразу «Все мои соседи лжецы».

На левой картинке изображён пример, удовлетворяющий условию задачи, на левой — не удовлетворяющий.





Решение:

Условие, того, что человек говорит правду равносильно тому, что произнесённое им утрвеждение истинно. То есть, то что человек рыцарь, равносильно тому, что каждый его сосед — лжец.

Итак, правильное решение:

∀x (РЫЦАРЬ(x) <=> (∀y (СОСЕД(x,y) => ЛЖЕЦ(y))))

4. Рыцари и лжецы. Описание последовательности.

Рыцари, которые говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут, выстроились в ряд. (В ряду хотя бы один человек).Каждый из них произнёс фразу «Все мои соседи лжецы». Обозначим рыцаря буквой **Р**, а лжеца — буквой **Л**. Тогда каждой последовательности рыцарей и лжецов, для которой выполняется условие задачи, соответствует некоторое слово.

Опишите это слово, используя формулу, которая называется регулярным выражением. Такое выражение строится с помощью описываемых ниже операций "итерация", "умножение", "сложение".

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию «звездочка» (итерация), например, **(abb)*** задает множество слов **{пустое слово, abb, abbabb, abbabbabb, …}**. Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой приписыванием второго операнда вслед за первым, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например **a*cb*** обозначает множество слов: **{c, ac, cb, acb, aac,..., aaa...acb...b, ...}**. Обратите внимание что слова, в которых нет букв **a** или **b**, получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так, обозначение **(a+b)*c+d(ac*+)** описывает множество всех последовательностей из букв **a** и **b** (обозначается **(a+b)***), к концу которых присоединена буква **c**, объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы **d**, за которой следует буква **a**, а за ней любое число букв **c** и ещё одним однобуквенным словом (**d** умножить на пустое слово — это **d**)."

Решение:

У рыцаря не может быть соседей рыцарей, то есть рыцари всегда стоят поодиночке и окружены лжецами. Лжецы могут стоять по одному или по двое, что соответствует регулярному выражению **ЛЛ+Л**. Вместе мы получаем циклически повторяющийся текст **Р(ЛЛ+Л)**, то есть **(Р(ЛЛ+Л))***. (Впрочем, само это выражение пока задаёт некоторые лишние слова - на самом деле, правильная последовательность не может оканчиваться на двух лжецов).

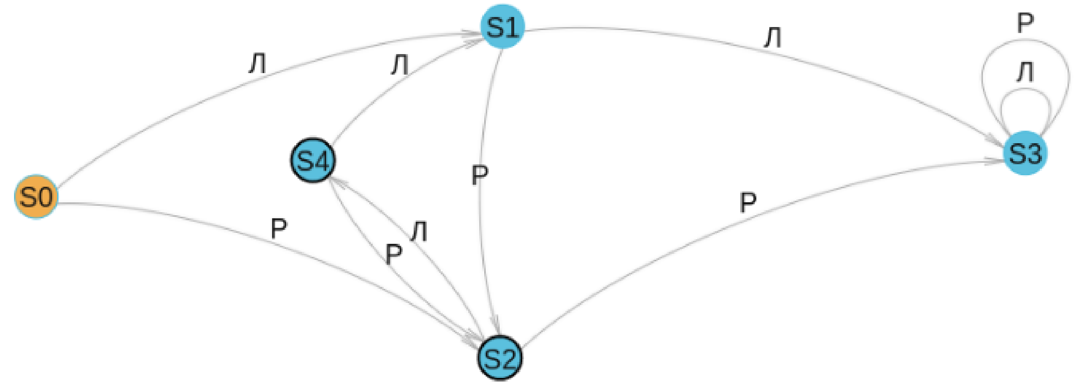
Последовательность не может состоять из одних лжецов, ведь тогда они все говорят правду. Значит, там точно есть хотя бы один рыцарь — добавим его к нашей последовательности: **(Р(ЛЛ+Л))*Р**. У нас получилось выражение, которое задаёт все последовательности, где по краям стоят рыцари. Домножение на **(Л+)** с обеих сторон даёт эти последовательностям возможность как начинаться/оканчиваться на лжеца, так и не делать этого.

Итак, наш ответ **(Л+)(Р(ЛЛ+Л))*Р(Л+)**.

5. Рыцари и лжецы. Распознающая схема.

Рыцари, которые говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут, выстроились в ряд. (В ряду хотя бы один человек).
Каждый из них произнёс фразу «Все мои соседи лжецы». Обозначим рыцаря буквой **Р**, а лжеца — буквой **Л**. Тогда каждой последовательности рыцарей и лжецов, для которой выполняется условие задачи, соответствует некоторое слово.
Постройте схему, которая будет распознавать слова в алфавите **{Л,Р}**, соответствующие описанным в задаче последовательностям рыцарей и лжецов.
Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок. Каждая стрелка соединяет два состояния и символизирует переход схемы из первого состояния во второе..
Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**. Поступающее на вход слово анализируется посимвольно. При анализе каждого символа схема переходит из текущего состояния по стрелке, над которой написан этот символ.
После того, как всё слово проанализировано, схема заканчивает работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых схема оказывается, в случае, если поступившее на вход схемы слово соответствует условию.

Решение:
У рыцаря не может быть соседей рыцарей, то есть рыцари всегда стоят поодиночке и окружены лжецами. Лжецы могут стоять по одному или по двое. Кроме того, ряд не может состоять из одних лжецов, ведь тогда они все говорят правду. Значит, там точно есть хотя бы один рыцарь
Построим распознающую схему исходя из этих соображений. Из состояния **S0** у схемы есть 2 пути: в состояние **S1** с буквой **Л** и в состояние **S2** с буквой **Р**.
S1 — состояние, в котором схема находится, когда последняя считанная буква — **Л**, а следующая буква буквой **Л** быть не может. Этому соответствует переход по букве **Л** в состояние **S3** — "плохое" состояние, в которое схема попадает, когда текущая последовательность недопустима и не может быть исправлена добавлением новых букв. Что же касается буквы **Р**, то по ней мы переходим в состояние **S2**, соответствующее ситуации, когда последний символ — **Р**.
Итак, **S2** — состояние, в котором схема находится, когда последняя считанная буква — **Р**. Следующая буква не может быть буквой **Р**, значит, по этой букве происходит переход в состояние **S3**. По букве **Л** же происходит переход в новое состояние, соответствующее ситуации, когда последняя считанная буква — **Л**, а предпоследняя — **Р**.
В этом новом состоянии **S4** следующая буква может быть любой и может даже отсутствовать. По букве **Р**, как обычно, происходит переход в **S2**. По букве **Л** же должен происходить переход в **S1**.
Описанный автомат изображён на рисунке:



6. Общественное мнение. Соседи. Машина Тьюринга.

Вдоль длинной улицы расположены дома, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

На ленте записана произвольная последовательность единиц и двоек, соответствующая политическим взглядам жителей улицы в какой-то из дней. Постройте машину Тьюринга, которая преобразует эту строку в строку, соответствующую политическим взглядам жителей улицы на следующий день.

Решение:

Из начального состояния **s** мы переходим в состояние **q1** или **q2** в зависимости от крайнего символа.
Рассмотрим первую ситуацию. Крайний левый человек не может поменять своё мнение, так как у него нет двух соседей. Таким образом первый символ никогда не поменяется. Если следующий символ также **1**, значит он точно не нуждается в замене и считывающая головка идёт дальше, оставаясь в состоянии **q1**. Если же следующий символ **2**, тогда для того, чтобы узнать, надо его изменить или нет, необходимо сначала прочитать следующий символ. Для этого считывающая головка переходит в состояние **q3** и опять сдвигается направо.
Если в состоянии **q3** она считывает символ **2**, значит, предыдущий символ менять не надо. Если же это символ **1**, надо вернуться обратно и поменять предыдущий символ. Для этого сначала происходит переход в состояние **q5** со сдвигом налево, а затем замена символа **2** на **1** с последующим сдвигом направо и переходом в состояние **q2**, как будто считывающая головка только что пришла с символа **2**.
Аналогично разбирается ситуация, когда первый символ это **2**.

Справа вы можете увидеть полный список команд.

Список команд

```
s[1]>q1[1]R
s[2]>q2[2]R
q1[1]>q1[1]R
q1[2]>q3[2]R
q3[2]>q2[2]R
q3[1]>q5[1]L
q2[2]>q2[2]R
q2[1]>q4[1]R
q4[1]>q1[1]R
q4[2]>q5[2]L
q5[2]>q2[1]R
q5[1]>q1[2]R
q1[*]> f[*]N
q2[*]> f[*]N
q3[*]> f[*]N
q4[*]> f[*]N
```

7. Общественное мнение. Соседи. Стабилизация.

7.1 Вдоль длинной улицы расположены дома, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

7.2 Вокруг круглой площади расположены 2017 домов, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей площади является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается с обоими своими соседями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что оба его соседа являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

7.3 Вокруг круглой площади расположены 2018 домов, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей площади является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается с обоими своими соседями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что оба его соседа являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

Решение:

7.1 Если человек изменил мнение, следующий раз он может изменить его только когда оба его соседа станут сторонниками противоположной партии. Значит, если какой-то человек меняет мнение бесконечное количество раз, то оба его соседа делают то же самое.

Если политические взгляды не стабилизируются, значит, какие-то люди меняют своё мнение бесконечное количество раз.

Рассмотрим среди них самого левого. Согласно доказанному в предыдущем абзаце, он также менял своё мнение бесконечное количество раз. Получаем противоречие с тем, что выбранный нами человек — самый левый из меняющих своё мнение бесконечное количество раз.

Значит, в условиях этого пункта политические взгляды жителей улицы обязательно стабилизируются.

7.2. Если какой-то человек менял своё мнение k раз, то его сосед не мог изменить мнение более k+1 раза.

Так как количество человек нечётно сторонники разных партий не могут чередоваться, следовательно, в любой момент есть двое соседей, являющихся сторонниками одной и той же партии. Но это значит, что эти двое никогда не поменяют своего мнения: чтобы один изменил мнение, его должен сначала изменить другой, и наоборот..

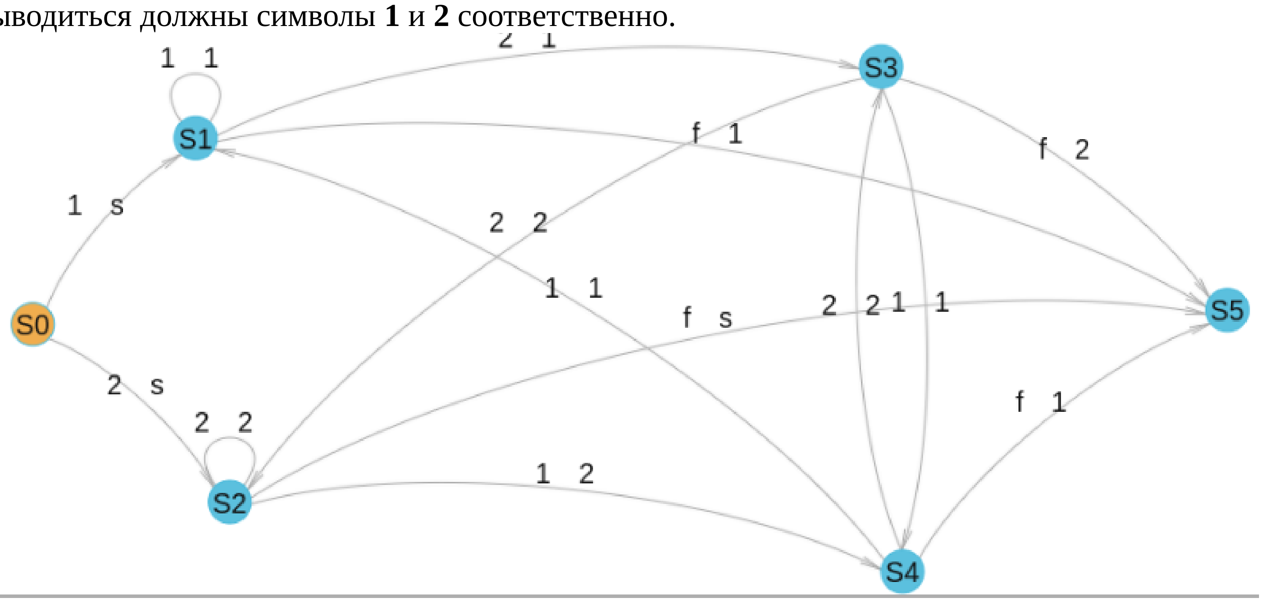
Значит, их соседи поменяют мнение не более одного раза; соседи соседей — не более двух раз, и так далее. Человек, живущий на противоположном конце площади поменяет мнение не более 1003 раз.

Следовательно, в условиях этого пункта политические взгляды жителей площади обязательно стабилизируются.

7.3 Этот пункт гораздо проще предыдущих: процесс изменения мнений может продолжать бесконечно. Примером является ситуация, когда сторонника разных партий чередуются. В этом случае каждый день каждый человек под влиянием соседей будет менять своё мнение на противоположное.

8. Общественное мнение. Соседи. Преобразующая схема.
Вдоль длинной улицы расположены дома (хотя бы два), в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.
На вход подаётся произвольная последовательность единиц и двоек, соответствующая политическим взглядам жителей улицы в какой-то из дней. Постройте схему, которая преобразует которая преобразует эту строку в строку, соответствующую политическим взглядам жителей улицы на следующий день.
Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок. Каждая стрелка соединяет два состояния и символизирует переход схемы из первого состояния во второе..
Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**. Поступающее на вход слово анализируется посимвольно. При анализе каждого символа схема переходит из текущего состояния по стрелке, над которой написан этот символ. При этом символ, написанный над стрелкой через запятую, подаётся на выход.

Решение:
Помимо начального состояния **S0** нам потребуется ещё пять состояний:
Состояние **S1** соответствует ситуации, в которой последний символ **1**, а предпоследний также **1** или отсутствует.
Состояние **S2** соответствует ситуации, в которой последний символ **2**, а предпоследний также **2** или отсутствует.
Состояние **S3** соответствует ситуации, в которой последний символ **2**, а предпоследний **1** .
Состояние **S4** соответствует ситуации, в которой последний символ **1**, а предпоследний **2**
Состояние **S5** соответствует ситуации, в которой последний символ **f**, то есть, состояние, в котором закончилась строка.
Основная идея построения данной схемы (конечного автомата) в том, что мы считываем символ, соответствующий какому-то человеку, а на выход подаём символ, соответствующий предыдущему человеку. То есть, на первом шаге всегда выдаётся символ **s**, а на последующих автомат почти всегда будет подавать на выход символ, который считал на предыдущем шаге. Исключениями являются ситуации, когда в состоянии **S3** получен символ **1** и обратная ей, когда в состоянии **S4** получен символ **2**. В этих случаях мы имеем дело с последовательностями **121** и **212** в которых средний человек меняет мнение. В этих случаях выводиться должны символы **1** и **2** соответственно.



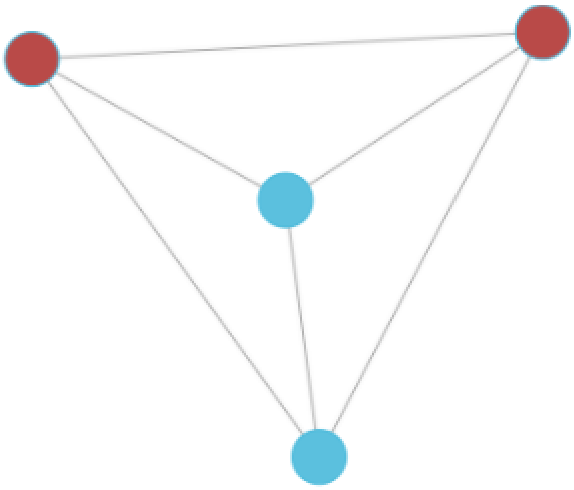
9. Общественное мнение. Друзья. Конструктив.

В некоторой компании у каждого человека по 3 друга. Каждый из них является сторонником одной из двух политических партий: красной или синей. Каждый день каждый человек общается со всеми своими друзьями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что большинство его друзей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

Постройте пример компании и исходного распределения политических симпатий, при котором стабилизации политических взглядов не происходит.

Решение:

На приведённой ниже картинке у каждой синей вершины два красных соседа и наоборот. Соответственно, каждый раз все вершины будут менять цвет, то есть каждый раз все люди будут менять свои взгляды, и стабилизации политических взглядов не произойдёт.



10. Общественное мнение. Друзья. Обоснование.

В некоторой компании у каждого человека по 3 друга. Каждый из них является сторонником одной из двух политических партий: красной или синей. Каждый день каждый человек общается со всеми своими друзьями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что большинство его друзей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

Докажите, что для любой компании существует исходное распределение политических взглядов при котором в дальнейшем стабилизации политических взглядов не происходит.

Решение:
Переведём задачу на язык графов: люди — это вершины, политические взгляды — цвета вершин, два человека дружат тогда и только тогда, когда соответсвующие вершины соединены ребром.
Пусть в графе есть чётный простой (т.е. не пересекающийся сам с собой ни по рёбрам, ни по вершинам) цикл. Тогда раскрасим вершины этого цикла с чередованием цветов. Вне зависимости от того, в какой цвет раскрашен третий сосед каждой вершины этого цикла, на каждом шаге она гарантированно будет менять цвет.
Пусть теперь в графе есть два я простых нечётных цикла, имеющие общие вершины (а значит, и рёбра, поскольку через из каждой вершины выходит всего три ребра). Пусть **A** — какая-то вершина, в которой сходятся эти циклы, т.е. одно из выходящих из неё рёбер принадлежит обоим циклам, а остальные два — разным. Выйдем из вершины **A** по ребру, принадлежащему только первому циклу и дойдём по ребрам первого цикла до ближайшей вершины **B**, принадлежащей обоим циклам. При этом мы прошли какое-то количество n рёбер. Из вершины **B** мы можем вернуться в **A** по рёбрам второго цикла двумя путями, при этом в этих двух путях в сумме нечётное количество рёбер, так как вместе они образуют в точности второй цикл. То есть, длины этих путей имеют разную чётность. Выберём из этих двух путей тот, чётность рёбер в котором такая же, как и у числа n . Тогда получается, что мы прошли замкнутым путём из вершины **A** в неё же, при этом этот путь не имеет самопересечений и имеет чётную длину. Значит, если в графе есть два пересекающихся цикла, то в нём можно найти чётный цикл.
Таким образом, чтобы отсутствия раскраски, при которой не наступает стабилизация, нам нужно построить граф, в котором все циклы нечётные и не пересекаются друг с другом. Докажем, что в случае, когда степень каждой вершины хотя бы 3, этого сделать не получится. Предположим противное: пусть такой граф нашёлся. Рассмотрим такой граф с наименьшим количеством вершины. Возьмём в нём какой-то цикл (он существует, так как суммарная степень вершин слишком большая, для того, чтобы в графе не было циклов). Из каждой вершины этого цикла выходит ещё одно ребро, не входящее в этот цикл. Эти рёбра не могут идти в вершины этого цикла или в одни и те же вершины, иначе мы получим два пересекающихся цикла. Значит, если заменить все вершины этого цикла на одну (стянуть цикл в точку), соединив новую вершину со всеми теми, с которыми были соединены вершины цикла, степень каждой из старых вершин останется прежней. Степень новой вершины будет равна количеству вершин в стянутом цикле, т.е. также будет хотя бы 3.
В новом графе все циклы также будут нечётными и не будут пересекаться друг с другом. Таким образом, мы построили меньший граф, удовлетворяющий этому условию. Однако, рассмотренный граф и так был наименьшим. Полученное противоречие доказывает задачу.

11. Возведение в степень.

Опишите алгоритм возведения числа **а** в 255 степень с помощью **только** операции умножения:

11.1 За 14 операций умножения без использования дополнительной памяти (то есть разрешается использовать только исходное число и результат последней операции).

11.2 За 10 операций умножения с использованием любого количества дополнительной памяти.

11.3 За 10 операций умножения с использованием одной ячейки дополнительной памяти (то есть помимо исходного числа и результата последней операции, разрешается держать в памяти ещё одно число. Это число может меняться в процессе работы алгоритма).

Замечание: верное решение для 11.3 будет засчитываться и для 11.2.

Решение:

11.1 Отсутствие дополнительной памяти означает, что мы можем использовать только две операции: возведение имеющегося числа в квадрат и домножение его на исходное число. Пусть у нас вычислено a в степени 2^n-1. Возведя её в квадрат и умножим затем на a, мы получим a в степени 2^{n+1}-1. Таким образом, за 7 таких пар операций, a=a^2-1 превращается в a^{255} (так как 255=2^8-1).

11.2 и **11.3**: мы приведём решение только для задачи с одной ячейкой памяти. Очевидно, оно будет подходить и для предыдущего пункта.

1-4) Четыре раза возведём текущее число в квадрат. Получим a^{16}.

5) Умножим a^{16} на a, получим a^{17}. Поместим это число в ячейку памяти.

6) Возведём a^{17} в квадрат, получим a^{34}.

7) Умножим a^{34} на a^{17}, получим a^{51}. Запомним это число вместо a^{17}.

8-9) Два раза возведём текущее число в квадрат, получим a^{204}.

10) Умножим a^{204} на a^{51}, получим a^{255}.